

# A KERÉK ÉS A SÍN KÖZÖTTI GÖRDÜLŐKAPCSOLAT HOSSZIRÁNYÚ ERŐKAPCSOLATI TÉNYEZŐJÉNEK MODELLEZÉSE KÉTPARAMÉTERES NEMSTACIONÁRIUS SZTOCHASZTIKUS MEZŐVEL

**Prof.Dr. Zobory István**

tanszékvezető egyetemi tanár

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Közlekedésmérnöki Kar

Vasúti Járművek Tanszék

H-1521 Budapest

## ABSTRACT

A járműkerék és a sínfelület gördülőkapcsolatában adott nyomaték kifejtése mellett átvitt keréktalpi tangenciális erő nagyságát a függőleges kerékerővel képezett hányados formájában az *erőkapcsolati tényezővel* szokásos megadni [4]. Ismeretes, hogy az erőkapcsolati tényező alakulása azonban *előre nem adható meg* a járműkerék érintkezési felületén jelenlévő hosszirányú kúszás egyértelmű függvényeként, mivel adott kúszás fennállása mellett számos véletlen hatás gyakorol lényeges befolyást a kialakuló erőkapcsolati tényező értékre. Ezen hatások közül jelentőségében kiemelkednek a vasúti sín ívhossza mentén a sínfej érintkezési sávjában kialakuló tribológiai jellemzők sztochasztikus változásai, amelyek a felületi mikrogeometriai viszonyok, a felületi oxidréteg jellemzői, valamint a bizonyos mértékben mindig jelenlévő különböző felületi szennyeződésektől függően alakulnak ki. Jelen tanulmányban az erőkapcsolati tényezőnek egy új szemléletű sztochasztikus modelljét mutatjuk be. Ez a modell az eddigiekben elterjedt és gyakorlatilag kevésbé alkalmazható nemstruktúrált sztochaszticitáskezelést meghaladva, az erőkapcsolati tényezőt a hosszirányú kúszás független változóként történő meghagyása mellett második paraméterként a kerék pályán elfoglalt helyzetét megadó pályaivhosszat veszi figyelembe. Az erőkapcsolati tényező sztochaszticitását egy a befutott pályaivhossz-paraméterrel megadott *szemi-Markov hordozófolyamat* és egy *másodrendben gyengén stacionárius ingadozásfolyamat* szuperpozíciójaként kezeli, így állítva elő a gördülőkapcsolat tangenciális erőátzármaztatására jellemző *kétparaméteres nemstacionárius sztochasztikus mezőt*.

*Kulcsszavak:* gördülőérintkezés, erőkapcsolati tényező, tribológia, sztochasztikus mezők, szemi-Markov folyamat

## 1. BEVEZETÉS

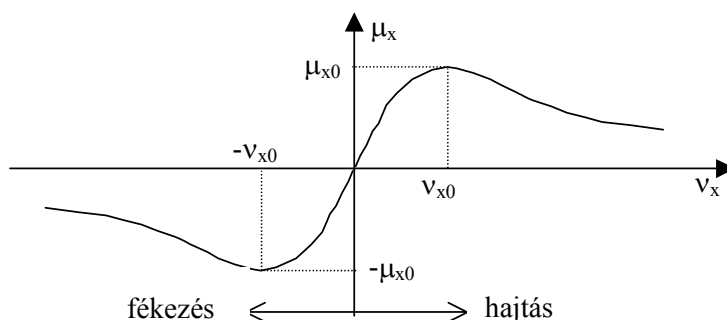
A vasúti járműkerék és a sín között megvalósuló erőátadási viszonyok alakulásának egzakt ismerete a járművek szabad gördülés melletti, vonóerőkifejtési, és fékezőerőkifejtés közbeni üzemállapotaiban kialakuló dinamikai folyamatainak vizsgálata szempontjából döntő jelentőségű. A kerék és a sín érintkezési felületén kialakuló *normális és tangenciális trakcióeloszlás* mennyiségi jellemzőire nézve a gördülőkapcsolatok kontaktmechanikája szolgáltat a gördülőkapcsolatban résztvevő szerkezeti elemek geometriai, mozgásállapot-leíró és súrlódási jellemzőinek megadott mennyiségi értékei mellett alapvető ismereteket a járművek tervezéséhez, illetve üzemeltetési jellemzőik alakulásának üzemirányítási szempontú értékeléséhez [1], [2]. A vasúti járművek vonóerőkifejtésével és fékezőerőkifejtésével kapcsolatosan elsősorban a *tangenciális trakció pályatengely-irányú (hosszirányú) komponensének eloszlásától függő keréktalpi kerületi erő* alakulása jelenti a legfőbb kérdést. A járművek futástechnikai folyamataiba ezen túlmenően lényegesen beleszól a *tangenciális trakció keresztirányú komponensének eloszlásától függő keresztirányú keréktalpi erő*, valamint a trakcióeloszlásból a kerék elméleti feltámaszkodási pontjára számított eredő fúrókúszási nyomaték alakulása is. A jelen tanulmányban alapvetően a vonó- és fékezőerő kifejtés vizsgálatához szükséges hosszirányú keréktalpi kerületi erő jellemzésével foglalkozunk. Ismeretes [4], hogy az  $F$  keréktalpi kerületi erőt célszerű a  $\mu_x$  *hosszirányú erőkapcsolati tényezővel* az  $F_n$  függőleges kerékerőből származtatni, az  $F = \mu_x F_n$  formai-

*\*A tanulmány a GVOP-3.1.1.-2004-05-0178/3.0 sz. kutatási projekt keretében került kidolgozásra*

lag egyszerű összefüggéssel. Természetesen a gördülőkapcsolat összetett mechanikai viszonyaiból következően az erőkapcsolati tényező függeni fog a kapcsolat mozgásállapotát jellemző

$$\nu_x = \frac{r\omega - v}{v} \Big|_{v \neq 0}$$

*hosszirányú kúszástól*, ahol  $r$  a kerék gördülőköri sugara,  $\omega$  a kerék szögsebessége,  $v$  pedig a kerék középpont hosszirányú haladási sebessége. Az ílymódon bevezetett  $\mu_x = \mu_x(\nu_x)$  erőkapcsolati tényezőre függvény első fontos jellemzője a  $\mu_x(0) = 0$  egyenlőség, azaz érvényes a „**zéró hosszirányú kúszás – zéró erőkapcsolati tényező**” kijelentés. Valóban, amennyiben a gördülőkontaktuson hosszirányú kerületi erőt viszünk át, a kontaktfelületeket környező anyagi részekben megjelenő rugalmas deformációk miatt zérustól különböző hosszirányú kúszás lesz jelen. Az elmondott gondolatmenet megfordításával, ha a rugalmas deformáció értéke eltűnik a kontaktfelületet környező anyagrészekben, akkor egyben a hosszirányú kúszás is eltűnik, és a rugalmas deformációk eltűnése eleve a kerületi erő eltűnését implikálja. Kis abszolút értékű hosszirányú kúszások mellett a  $\mu_x$  értéke a kúszás közel lineáris függvényének bizonyul, azonban növekvő abszolút értékű kúszások mellett a lineáris változás üteme *szaturációs* jelleggel erős nemlinearitást mutatva változik. A kontaktfelület adhéziós tartományának ([4]) egy pontra zsugorodásakor  $\mu_x$  eléri a *tapadási határnak* nevezett lokális szélsőértékét, miután tovább növekvő abszolút értékű kúszások mellett makroszkópikus csúszás alakul ki (kerékperdülés vagy kerécsúszás), a  $\mu_x$  érték ekkor jelentésében már csúszó súrlódási tényezőbe átmenve abszolút értékben erősen csökken, amely csökkenés végértékét tekintve a tapadási határ cca. harmadára becsülhető [5]. A tapadási határ eléréséhez tartozó hosszirányú kúszás abszolút értéke *tiszta, száraz sín* esetében  $|\nu_{x0}| = 0,01$ -re becsülhető, a hozzá tartozó erőkapcsolati tényező csúcsérték  $|\mu_{x0}| = 0,35$  várható értéke mellett. Ezzel szemben *szennyezett, csúszós/fagyos sín* esetén ezen becsült érték  $|\nu_{x0}| = 0,03 \dots 0,05$  értékre növekszik, és a hozzá tartozó várható erőkapcsolati tényező abszolút értékben  $|\mu_{x0}| = 0,1 \dots 0,08$  -re csökken. Az 1. ábrán felrajzoltuk a hosszirányú erőkapcsolati tényező *állandósult tribológiai viszonyok mellett* jellegzetes változását a  $\nu_x$  hosszirányú kúszás függvényében.



1. ábra A hosszirányú erőkapcsolati tényező jellegzetes alakulása a hosszirányú kúszás függvényében

Az ábrán feltüntetett módon a *pozitív kúszások a vonóerő-kifejtés* esetéhez tartoznak, míg a *negatív kúszások a fékezőerő-kifejtés* esetén lépnek fel. Természetes ezek után, hogy a jármű szabad futása esetén, mikoris csupán a kis értékű csapsúrlódási és gör-

dűlőellenállási nyomaték fékezi a kereket, kis értékű negatív kúszás melletti kismértékű fékezőerő kifejtés és az erőkapcsolati tényező kis negatív értéke alakul ki.

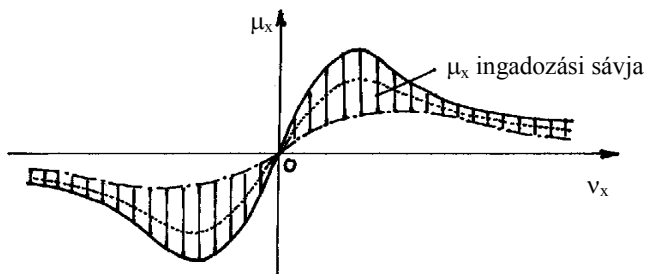
## 2. A KERÉK-SÍN KAPCSOLAT SZTOCHASZTICITÁSA

Az előzőekben már említésre került az erőkapcsolati tényezőnek a gördülőkapsolatban résztvevő szerkezeti elemek geometriai, mozgásállapot-leíró és súrlódási jellemzőinek megadott értékeitől való függősége. Tekintettel arra, hogy egy adott járműkerék a sínen végig-gördülve valamely adott pályaponton előre pontosan meg nem adható módon alakuló érintkezésgeometriai feltételekkel találkozhat, továbbá, hogy a sínfelület mikrogeometriája, a felületi rétegek keménysége, az érintkező felületeken jelen lévő szennyező anyagok mennyisége és elhelyezkedése, továbbá a környezet változó hőmérséklete és páratartalma miatt a figyelembe veendő csúszósúrlódási tényező értéke is minden pályapontban bizonytalan érték, ezért a hosszirányú erőkapcsolati tényezőt *valószínűségi változóként* kell kezelni [3], [4], [9]. Az erőkapcsolati tényező bizonytalanságának ténye a vasúttechnikai szakirodalomban régóta megjelent, és az első gyakorlati alkalmazási igényeket azzal vélték kielégíteni, hogy a korábban determinisztikusnak tekintett  $\mu_x(v_x)$  függvénykapcsolatot a  $v_x$  hosszirányú kúszáson kívül a „véletlentől” is függőnek tekintették, azaz az 1. ábrán vázolt egyetlen függvénygörbe helyett egy szórásmező is figyelembevételre került. Így alakult ki az erőkapcsolati tényező első „naív” *sztochasztikus modellje* az alábbiak szerint:

A véletlentől való függés matematikai kezelésére rendelkezésre álló a sztochasztikus folyamatok elméletének alkalmazásával bevezethető a véletlen jelenséghez tartozó kimenetelek – a  $w$ -vel jelölt elemi események –  $W$  halmaza, az un. *eseménytér*. Az így kialakuló matematikai modell keretében a  $\mu_x$  hosszirányú erőkapcsolati tényezőt egy  $v_x$  *paraméteres nemstacionárius sztochasztikus folyamatnak* lehet tekinteni. Az elmondottakkal összhangban ekkor a hosszirányú erőkapcsolati tényező mint egy *a hosszirányú kúszástól és a véletlentől függő kétváltozós függvény* jelenik meg:

$$\mu_x = \mu_x(v_x, w), \quad v_x \in R, w \in W,$$

ahol  $R$  a folyamat *paramétertere*, esetünkben a valós számok halmaza (a számegyenes - a kúszástengely - pontjainak összessége),  $W$  pedig a folyamattal kapcsolatos elemi események halmaza, az *eseménytér*. A bemutatott egyszerű modell azonban csak korlátozott módon ad jellemzést az erőkapcsolati tényező bizonytalanságáról. A 2. ábrán felrajzoltuk a pontvonallal jelölt várható erőkapcsolati tényező függvény körüli bizonytalansági sávot.



2. ábra A kúszásfüggő erőkapcsolati tényező sávyszerűsége, minden kúszási értékhez hozzá van rendelve egy valószínűségi változó ingadozási intervalluma

Ez az egyszerű sztochasztikus modell azonban *egymagában* nem tud választ adni arra a kérdésre, hogy a  $v_x$  paraméter különböző közeli szomszédos  $v_{x1}$  és  $v_{x2}$  értékeihez rendelt  $\mu_{x1}(w) = \mu_x(v_{x1}, w)$  és  $\mu_{x2}(w) = \mu_x(v_{x2}, w)$  perem-valószínűségi változók kö-

zötti *sztochasztikus kapcsolatot* miképp lehet jellemezni. Így ez a modell inkább csak arra alkalmas, hogy a sávyszerűség tényét rögzítse, és a *bizonytalansági sáv* alakjára nézve tájékoztasson, számszerű értékek tekintetében pedig a tapadási határ statisztikus jellemzését adja az utóbbi minimális és maximális értékei, illetve az azokhoz tartozó jellemző hosszirányú kúszások számadatainak megadásával.

Tekintettel arra, hogy sínen tovagördülő kerék a befutott ívhossz függvényében más és más tribológiai körülményekkel találkozhat, az erőkapcsolati tényező sztochasztikus változásának belső dinamikáját is tükröző leírási módhoz annak figyelembevételével lehet eljutni, hogy az erőkapcsolati tényező hosszirányú kúszástól való determinisztikus függését az 1. ábra szerint megadó  $\mu_x(v_x)$  függvénykapcsolatban szereplő paraméterek *pályahossz menti sztochasztikus változását* is beépítjük a matematikai modellbe. Mielőtt a sztochasztikus modell felépítésére rátérnénk, emlékeztetünk arra [4], hogy a  $\mu_x(v_x)$  erőkapcsolati tényezőt másodfokú parabolaívből és exponenciális függvénygörbéből folytonosan differenciálható módon összekapcsolva kielégítően meghatározó determinisztikus matematikai modell a következő négy pozitív paramétert tartalmazza:

- a tapadási határ számértéke:  $\mu_{x0} > 0$ ,
- a tapadási határhoz tartozó hosszirányú kúszás számértéke:  $v_{x0} > 0$ ,
- az erőkapcsolati tényező inflexió pontjának abszcisszája:  $v_{xe} > 0$ ,
- az erőkapcsolati tényező  $v_x \rightarrow \infty$  esetén adódó határértéke:  $\mu_{x\infty} > 0$ ,

Az elmondottak alapján a  $\mu_x(v_x)$  hosszirányú erőkapcsolati tényező megadásában indokolt a megadott négy jellemző paraméterként való szerepeltetése. Ezzel első lépésben az öt skalár változós  $\mu_x = \mu_x(v_x, \mu_{x0}, v_{x0}, v_{xe}, \mu_{x\infty})$  függvényt kapjuk, azonban célszerű a  $v_x$  hosszirányú kúszáson kívüli paramétereket egy  $\mathbf{p} = [\mu_{x0}, v_{x0}, v_{xe}, \mu_{x\infty}]^T \in R^4$  négydimenziós vektorba foglalni, és a hosszirányú erőkapcsolati tényezőt a  $\mu_x = \mu_x(v_x, \mathbf{p})$  vektorparaméteres függvénnyel jellemezni, melynek explicit alakja a következő:

$$\mu_x = \mu_x(v_x, \mathbf{p}) = (\text{sign } v_x) \begin{cases} 4\mu_{x0} \frac{|v_x|}{2v_{x0}} (1 - \frac{|v_x|}{2v_{x0}}) & \text{ha } 0 \leq |v_x| < v_e \\ \eta e^{-\xi(|v_x| - v_{xe})} + \mu_{x\infty} & \text{ha } |v_x| \geq v_e \end{cases},$$

ahol:

$$\xi = - \frac{2\mu_{x0} \frac{1}{v_{x0}} (1 - \frac{v_{xe}}{v_{x0}})}{4\mu_{x0} \frac{v_{xe}}{2v_{x0}} (1 - \frac{v_{xe}}{2v_{x0}}) - \mu_{x\infty}}$$

és

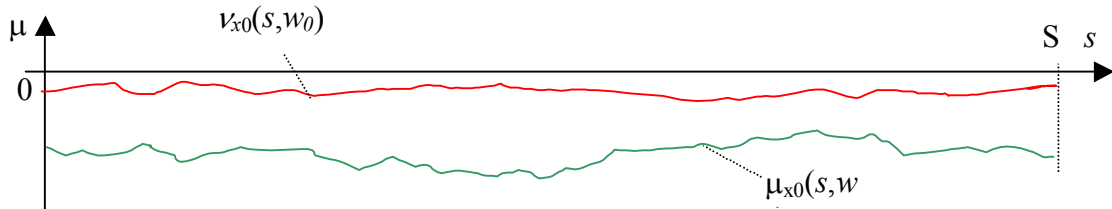
$$\eta = 4\mu_{x0} \frac{v_{xe}}{2v_{x0}} (1 - \frac{v_{xe}}{2v_{x0}}) - \mu_{x\infty}.$$

Az erőkapcsolati tényező függvény meghatározására a fentiekben bemutatott összefüggések nyilvánvaló lehetőséget szolgáltatnak. A különböző tribológiai viszonyok esetén kialakuló keréktalpi kerületi erő (vonóerő, vagy fékezőerő) származtatásához, az szükséges csupán, hogy az  $s$  befutott pályahossztól függően meg lehessen adni az

aktuális paramétereket megjelenítő  $\mathbf{p}$  vektor koordinátáinak sztochasztikus alakulását, az utóbbit a befutott pályahossz sztochasztikus függvényeként kell tekinteni, röviden: a  $\mathbf{p}(s, w)$  vektort mint egy befutott pályahossz-paraméteres

$$\mathbf{p}(s, w) = [\mu_{x0}(s, w), v_{x0}(s, w), v_{xe}(s, w), \mu_{x\infty}(s, w)]^T \in R^4$$

vektorértékű sztochasztikus folyamatot kell jellemezni. A fenti vektorfolyamat első két koordinátafolyamatának realizációira nézve alkalmas mérőeszközzel információt lehet szerezni. Ezt a célt szolgálja a BME Vasúti Járművek Tanszékén kifejlesztés alatt álló TRIBOROLLER, amellyel bizonyos nem ekvidisztáns mintavételi úthossz-értékek mellett mérni lehet a tapadási határ és a hozzá tartozó hosszirányú kúszás alkotta értékpárokat [11], [12]. A méréssel nyert  $\mu_{x0}(s, w_0)$  és  $v_{x0}(s, w_0)$  koordinátafolyamatok realizációs függvényekből kiértékelt információ alapján már mód nyílik a tribológiai jellemzőknek a vasúti pálya hossza mentén megvalósuló alakulását leíró új szerkezetű *instacionárius sztochasztikus folyamatmodell* konstrukciójára, és az abban szerepet kapó jellegzetes véletlen mechanizmusok paramétereinek numerikus jellemzésére. A 3. ábrán bemutatjuk a mért  $\mu_{x0}(s, w_0)$  és  $v_{x0}(s, w_0)$  koordinátafolyamatok fêkezési üzemállapotok esetén megvalósuló jellegét.



3.ábra Az erőkapcsolati tényező  $\mu_{x0}(s, w_0)$  és  $v_{x0}(s, w_0)$  koordinátafolyamatainak a  $[0, S]$  intervallumon kialakuló realizációs függvényeinek jellege

Nem jelent egyszerűen megválaszolható kérdést a hosszirányú erőkapcsolati tényezőben szereplő  $\mathbf{p}(s, w)$  sztochasztikus paramétervektor két utolsó koordinátájának mérésekre támaszkodó becslése. A probléma részleteibe nem belemerülve, a kérdés gyakorlati közelítő megoldására egyrésről a *Kandó-féle ökölszabály* [5] elfogadása látszik célszerűnek, amely szerint  $\mu_{x\infty} = \mu_{x0}/3$ , másrésről javasolható a sok szimulációs vizsgálat eredményének középértékeként adódó  $v_{xe} \approx 1.08 v_{x0}$  összefüggés elfogadása.

Az elmondottakból nyilvánvaló, hogy erőkapcsolati tényező korábban bevezetett  $\mu_x = \mu_x(v_x, w)$  csupán kúszásparméteres „naiv” sztochasztikus modellje lényegesen fejleszthető a fentiek szerinti pályahossz-paraméteres  $\mathbf{p}(s, w)$  sztochasztikus vektorfolyamat figyelembevételével, ami „helyére teszi” az erőkapcsolati tényező sztochaszticitásának forrását, [9], [10]. Az elmondottak szerint az erőkapcsolati tényező érték mint a  $\mu_x$  valószínűségi változó két paramétertől függ: egyrésről a kontaktmechanikai viszonyokat tükröző  $v_x$  hosszirányú kúszás játszik közre, másrésről pedig a befutott  $s$  pályaív hossz játszik meghatározó szerepet. A kialakuló sztochasztikus modell formális felírásában jól bemutatható az elmondott gondolatok érvényesülése. Vegyük ugyanis figyelembe, hogy a legelső  $\mu_x = \mu_x(v_x, w)$  naiv sztochasztikus modellben a véletlentől való függés a pályaív hossz-paraméteres  $\mathbf{p}(s, w)$  vektorértékű sztochasztikus folyamaton keresztül lép be, ezért indokolt a következő felírás:

$$\mu_x = \mu_x(v_x, w) = \mu_x(v_x, \mathbf{p}(s, w)).$$

Tekintettel azonban arra, hogy az utóbbi közvetett függvényben a  $v_x$  és az  $s$  változók jelentik a járműdinamikai rendszer mozgásvizonyaival kapcsolatos lényegi információt hordozó változókat, és a  $\mathbf{p}$  vektorfüggvény lényegileg csupán „hatásközvetítő szereppel” bír, teljesen indokolt az erőkapcsolati tényező

$$\mu_x = \mu_x(v_x, s, w), \quad v_x, s \in R, \quad w \in W$$

alakú felírása, amely az erőkapcsolati tényezőt egy *kétparaméteres sztochasztikus mezőként* ragadja meg, azaz *minden*  $(v_x, s)$  *paraméterpárhoz hozzá van rendelve a*  $\mu_x(w)$  *valószínűségi változó.*

### 3. A SZEMI-MARKOV HORDOZÓFOLYAMAT MODELL

Az elmondottak szerint a kerék által a vasúti pályán befutott  $s$  ívhossz mentén a tribológiai viszonyok változását tükröző sztochasztikus folyamat lényeges szereppel bír, és ezért fontos kérdésként jelentkezik a modellbe beépülő  $\mathbf{p}(s, w)$  vektorértékű folyamat helyes megjelenítése. Mindenekelőtt elmondható, hogy mind a mai napig nem alakult ki végleges modellstruktúra, és így ez a kérdéskör napjainkban még a tudományos feltárás stádiumában van.

Az első sztochasztikus szemléletű modell a  $\mathbf{p}(s, w)$  folyamatot másodrendben gyengén stacionárius sztochasztikus folyamatként fogta fel [10], és a dinamikai elemzésekhez szükséges realizációs függvényeket a folyamathoz tartozó és ismertnek tekintett spektrális sűrűségfüggvényekre támaszkodva kezelte. A mondott módszerben az erőkapcsolati tényező sztochasztikus változása a  $\mathbf{p}(s, w)$  folyamat koordinátafolyamatainak a spektrális sűrűségfüggvényekre és a számítógépben generált véletlen számsoorozatokra támaszkodó generálásával valósul meg. Nem bocsátkozunk most a  $\mathbf{p}(s, w)$  folyamat jellemzőinek meghatározásával kapcsolatos identifikációs probléma részleteibe, azonban utalni kell arra, hogy a  $\mathbf{p}(s, w)$  koordinátafolyamatainak valószínűségi mechanizmusáról és kölcsönös sztochasztikus függőségi viszonyairól (korreláltságukról) jelenleg a szakirodalom csak igen hiányos információval szolgál.

A kerék-sín kapcsolat erőátszármaztatási viszonyaira vonatkozó tapasztalati ismeretek arra mutatnak, hogy a vasúti sín mentén kialakuló tribológiai viszonyokban határozottan felismerhető a tapadási határt jellemző maximális erőkapcsolati tényező bizonyos közelítőleg stabilizálódott értékek (stabil mozgóátlag-értékek) között megvalósuló átmenetekkel jellemzett lefolyása, miközben az említett szakaszonként közel állandó középértékérték körüli, stacionárius véletlen folyamattal közelíthető kismértékű ingadozás is fennáll. Az egyes közel állandó középértékű  $\mu_0$  maximális erőkapcsolati tényezővel (tapadási határral) jellemezhető pályaszakaszok hosszai mint valószínűségi változók egy *véletlen pontfolyamat* követési útközeiként kezelhetők. A tribológiai viszonyok matematikai modellezésének teljessé tételéhez még annak a megállapítása szükséges, hogy a stabilizálódott tapadási tényező szintek közötti átmenetek milyen valószínűséggel következnek be a tribológia viszonyok pályahosszmenti változása során. A pályahossz mentén folytonos változást mutató tapadási határ folyamat fentiekben a közelítő leírását adó lépcsős folyamat már felvázolja a megcélzott *szemi-Markov* modell kereteit, amely modellben az egyes szintek közötti átmenetek valószínűségei egy ún. *beágyazott Markov lánc* átmenetvalószínűségi mátrixával, míg az egyes egymás után következő konstans szinteken történő pályahosszban mért tartózkodások valószínűségi változók, amelyeket az előzményi szint alakulásának feltéte-

le mellett számított feltételes eloszlásfüggvény-mátrix-szal lehet jellemezni. A következőkben kizárólagosan a hosszirányú erőkre vonatkozó erőkapcsolati tényezővel és paraméter folyamataival foglalkozunk, ezért az eddig használt  $x$  indexet a jelölés egyszerűsítése érdekében elhagyjuk.

Vizsgáljuk először a vizsgált  $\mu_0(s, w)$  *tapadási határ folyamat* diszkretizálását. Ha egy elegendően sűrű ekvidisztáns felosztást képezünk a lehetséges a legnagyobb előfordulható abszolút értékű  $\mu_{0\max}$  tapadási határral meghatározott origó körüli  $[-\mu_{0\max}, \mu_{0\max}]$  intervallumban, és az így kiadódó  $\mu_{0i}$ ,  $i = -N, \dots, -1, 0, 1, \dots, N$  felosztáspontokat diszkretizált állapotoknak tekintjük, akkor az említett szintek közötti véletlenszerű  $\mu_{0i} \rightarrow \mu_{0j}$  állapotátmenetek váltakozásának leírására az  ${}_M\mu_0(s, w)$  beágyazott *Markov-láncot* alkalmazhatjuk, amelynek jellemzése az állapotátmeneti feltételes valószínűségek megadásával történhet. Ezen jellemzés mindig egy fellépett állapotátmenethez tartozó  $s_a$  pályaivhossz előtt fennálló  $\{w: {}_M\mu_0(s_a^-, w) = \mu_{0k}\}$  esemény és az átmenet után bekövetkezett  $\{w: {}_M\mu_0(s_a^+, w) = \mu_{0j}\}$  esemény figyelembevételével történik a

$$p_{kj} = \mathbf{P}\{w: {}_M\mu_0(s_a^+, w) = \mu_{0j} \mid {}_M\mu_0(s_a^-, w) = \mu_{0k}\}$$

feltételes valószínűségek meghatározásával. Az utóbbiak mátrixba foglalásával előáll az állapotváltozásokat modellező, *első közelítésben homogénnek tekintett* beágyazott Markov-láncot kimerítően jellemző  $\Pi$  *egylépéses átmenetvalószínűségi mátrix*.

A szemi-Markov folyamat másik meghatározó jellemzőjét az állapotváltozások bekövetkeztével elért új állapotokban megvalósuló tartózkodás hosszát mint valószínűségi változót mennyiségileg megragadó feltételes eloszlásfüggvények alkotta mátrixfüggvény jeleníti meg. Tegyük fel, hogy a pályaivhosszparaméteres  ${}_M\mu_0(s, w)$  szemi-Markov lépcsős folyamat valamely  $s_a$  állapotátmeneti ponthoz az  $\mu_{0k}$  állapot fennállása mellett érkezve az állapotváltozás ugrásszerű lezajlása után átmegy a  $\mu_{0j}$  állapotba. Az így elért új állapotban történő tartózkodásának hosszát a  $\sigma_{kj}(w)$  valószínűségi változó jellemzi, melynek az újonnan elért  $\mu_{0j}$  szinten történő tartózkodása hosszának szint el nem érési valószínűségét azonban befolyásolhatja az állapotátmenet előtt fennálló  $\mu_{0k}$  - u.n. „előzményi” állapot alakulása. Ilyen előkészítés után szinte nyilvánvalóan adódik, hogy az újonnan elért  $\mu_{0j}$  állapotban történő tartózkodás hosszának valószínűségi jellemzését az előzményfüggés figyelembevételével a  $\sigma_{kj}(w)$  valószínűségi változó  $s$  ív-hossz érték alatt maradásának (szint el nem érési eseményének) az  $\{w: {}_M\mu_0(s_a^+, w) = \mu_{0j}\} \cap \{w: {}_M\mu_0(s_a^-, w) = \mu_{0k}\}$  feltételi esemény melletti feltételes valószínűségével, vagyis az

$$F_{kj}(s) = \mathbf{P}\{w: \sigma_{kj}(w) < s \mid \{w: {}_M\mu_0(s_a^+, w) = \mu_{0j}\} \cap \{w: {}_M\mu_0(s_a^-, w) = \mu_{0k}\}\}$$

*feltételes eloszlásfüggvénnyel* célszerű megadni. Az utóbbi feltételes eloszlásfüggvényeket minden  $kj$  indexpárra elkészítve és mátrixba foglalva előáll a szinten tartózkodási hosszak statisztikai természetét magába foglaló pályaivhossz-függő,  $2N \times 2N$  méretű

$$\mathbf{F}(s) = \{F_{kj}(s)\}, \quad k, j = -N, \dots, -1, 0, 1, \dots, N$$

*mátrixértékű függvény*. Egyes kérdések megválaszolásához szükséges az egyes  $\mu_{0j}$  szinteken megvalósuló tartózkodási hosszak előzménytől független, abszolút eloszlásfüggvényeinek ismerete, mely eloszlásfüggvények a teljes valószínűség tételének alkalmazásával adódnak:

$$\begin{aligned}
F_j(s) &= \mathbf{P}\{w: \sigma_j(w) < s\} = \\
&= \sum_{k=-N}^N \mathbf{P}\{w: \sigma(w) < s \mid \{w: {}_M\mu_0(s_a^+, w) = \mu_{0j}\} \cap \{w: {}_M\mu_0(s_a^-, w) = \mu_{0k}\}\} p_{kj} \mathbf{P}\{w: {}_M\mu_0(s, w) = \mu_{0k}\} = \\
&= \sum_{k=-N}^N F_{kj}(s) p_{kj} p_k, \quad j = -N, \dots, -1, 0, 1, \dots, N.
\end{aligned}$$

A most nyert kifejezésben a  $p_k$  szorzók a beágyazott homogén Markov-lánc stacionárius peremeloszlásának  $\mathbf{P}\{w: {}_M\mu_0(s, w) = \mu_{0k}\}$  valószínűség értékeit jelentik. A  $p_k$  elemek alkotta  $2N$  dimenziós vektor meghatározása a  $\Pi$  egy lépéses átmenetvalószínűségi mátrixra vonatkozó *sajátérték feladat* megoldásával történhet.

A tárgyalásnak ezen a pontján szükséges rámutatni az előzőekben bevezetett  ${}_M\mu_0(s, w)$  szemi-Markov hordozófolyamat realizációs függvényeinek a folytonos lefutású  $\mu_0(s, w)$  tapadási határ folyamat méréssel meghatározott realizációs függvényeivel való kapcsolatára. Az elmondottakból nyilvánvaló, hogy a szemi-Markov modell realizációs függvényei a folytonos realizációs függvények lépcsős közelítését adják, és amennyiben adott  $\mu_{0\max}$  esetén az intervallumfelosztás finomságát jellemző  $N$  szám elég nagy – azaz a diszkrétizálási lépcsők kicsik – a közelítés kielégítő lesz.

Hogyan történik mármost a diszkrétizációnak megfelelő lépcsős  ${}_M\mu_0(s, w)$  szemi-Markov-folyamat realizáció előállítás? A kiindulásképp felvett  $[-\mu_{0\max}, \mu_{0\max}]$  intervallum ekvidisztáns  $\mu_{0i}$ ,  $i = -N, \dots, -1, 0, 1, \dots, N$  osztáspontjainak megválasztásával a kérdés az állapotátmeneti pályáívhosszak  $\{s_{aij}\}$ ,  $i = -N, \dots, -1, 0, 1, \dots, N$ ,  $j = 1, 2, \dots, K_i$  sorozatának meghatározására redukálódik. Jelölje a  $\{\mu_{0i}\}$  felosztás-sorozat szomszédos elemeinek ekvidisztáns távolságát  $\Delta\mu_0$ . Egy tetszőlegesen választott  $\mu_{0i}$  diszkrétizált szint esetén vizsgálni kell azokat a pályapontokat, amelyekben a folytonos  $\mu_0(s, w)$  tapadási határ folyamat méréssel meghatározott realizációs függvénye belép a  $\mu_{0i}$  szint körül értelmezett  $I_i = [\mu_{0i} - (\Delta\mu_0/2), \mu_{0i} + (\Delta\mu_0/2)]$  intervallumba, vagy éppen elhagyja azt. Minden lehetséges  $i$  szintre elvégezve a be- és kilépési pontok  $K_i$  hosszúságú sorozatának meghatározását, végül is a különbözőnek kiadódott osztáspontok egyesítésével rendelkezésre áll a vizsgált pályaszakaszon mért realizációs függvény lépcsős közelítésének  $\{s_{aij}\}$  ugráshelyi abszcisszáit meghatározó pontsorozat. Az ily módon numerikus jellemzőit tekintve is meghatározott  ${}_M\mu_0(s, w)$  szemi-Markov-folyamat realizációból kiértékelhetők a korábbi tárgyalásunk során bevezetett  $\Pi$  átmenetvalószínűségi mátrix és az  $\mathbf{F}(s)$  feltételes szinttarozkodási eloszlásfüggvényeket tartalmazó mátrixfüggvény *statisztikai becslései* a megfelelő *feltételes relatív gyakoriságok* módszeres kiszámításával.

A fentiekben bemutatott diszkrétizációs eljárás sajátosságaiból következően, a kiadódó mátrix-jellemzők struktúrájáról a következő megjegyzést lehet tenni. A  $\Pi$  átmenetvalószínűségi mátrix olyan  $2N \times 2N$ -méretű speciális *kontinuáns mátrix* (szalagmátrix) lesz, amelynek a főátlójában mindenütt zérus áll, és teljesül az átmenetvalószínűségi mátrixok mindenkor sztochasztikussága, nevezetesen minden sora esetén a sorbeli két zérustól különböző elem összege egységnyi. Az ugyancsak  $2N \times 2N$ -méretű  $\mathbf{F}(s)$  mátrixfüggvényben csak azon az indexpozíciókban áll nem azonosan zérus függvény, amelyeknél a  $\Pi$  átmenetvalószínűségi mátrixban is zérustól különböző elemek álltak, vagyis a főátló két szomszédos átlójához tartozó indexpozíciók azonosítanak az  $\mathbf{R}^+$  nemnegatív félegyenesen értelmezett feltételes valószínűségi eloszlásfüggvényeket.



A fentek szerinti  $(\Pi, F(s))$  mátrixjellemző-pár magába foglalja a folytonos állapotterű  $\mu_0(s, w)$  tapadási határ folyamat állapotterének diszkretizálása után kialakult  ${}_M\mu_0(s, w)$  szemi-Markov modellre – mint közelítő „hordozófolyamat” modellre – vonatkozó információt. Nyilvánvaló, hogy az eredeti folytonos állapotterű  $\mu_0(s, w)$  tapadási határ folyamat eltérést mutat a szemi-Markov modell-lel meghatározott lépcsős realizációjú folyamattól. A két folyamat különbségeként értelmezett

$$\rho(s, w) = {}_M\mu_0(s, w) - \mu_0(s, w)$$

hibafolyamatot alkalmas sztochasztikus ingadozásmoddal közelítve az eredetileg vizsgált folyamat gyakorlati alkalmazásokhoz felhasználható előállítás

$$\mu_0(s, w) = {}_M\mu_0(s, w) - \rho(s, w)$$

alakban adódik.

#### 4. A MÁSODRENDENBEN GYENGÉN STACIONÁRIUS INGADOZÁSMODELL

Az előző fejezetben bevezetett  ${}_M\mu_0(s, w)$  szemi-Markov közelítő folyamat és a folytonos paraméterű kiindulási  $\mu_0(s, w)$  folyamat eltéréseként kapott  $\rho(s, w)$  hibafolyamat közelítő jellemzését *zéró középértékű (várható értékű) másodrendben gyengén stacionárius ingadozásmoddal* keretében célszerű megkezdni.

A tárgyalás jelen pontján fel lehet tételezni, hogy a *zéró középértékű*  $\rho(s, w)$  hibafolyamat realizációs függvényének értékei az eredeti folytonos folyamat mintavételes vizsgálatakor alkalmazott  $\{s_i\}$ ,  $i=1, 2, \dots, M$  ekvidisztáns abszcissza-sorozaton ismertek, és ennek megfelelően ismert a  $\{\rho(s_i, w)\}$ ,  $i=1, 2, \dots, M$  realizációs sorozat is. Ezen sorozat alapján első lépésben meghatározható a hibafolyamat autokovariancia függvényének numerikus becslése, ebből pedig *inverz Fourier-transzformációval* adódik a  $\rho(s, w)$  hibafolyamat *elemi komplex harmonikus függvényekből* való felépülését jellemző *spektrális sűrűségfüggvény* becslő változata. Az utóbbi spektrális sűrűségfüggvény lényegét tekintve megvalósítja a hibafolyamat ingadozási viszonyainak az „eltárolását”, és így lehetőséget szolgáltat a tapasztalati hibafolyamattal azonos statisztikai tulajdonságú ingadozásfolyamat számítógépi véletlen szám generáláson alapuló előállítására és az ugyancsak számítógépi szimulációval előállított szemi-Markov közelítő folyamat valósághűséget biztosító további modulálására.

Vizsgáljuk tehát a  $\rho(s, w)$  hibafolyamat autokovariancia függvényét, amelyet most a hibafolyamat zéróközépértékűsége miatt a

$$C_{\rho\rho}(\delta) = E \rho(s, w) \rho(s + \delta, w)$$

egyszerű várható érték definiál. A hasonló mérnöki problémáknál szokásos módon (nem menve az *ergodicitás* kérdésének taglalásába) a várható érték képzést annak torzítatlan becslésével az

$$C_{\rho\rho}(\delta) = E \rho(s, w) \rho(s + \delta, w) \approx \frac{1}{S - \delta} \int_0^{S-\delta} \rho(s, w) \rho(s + \delta, w) ds = \hat{C}_{\rho\rho}(\delta, w)$$

$w$ -függő interálátlaggal lehet közelíteni, ha a vizsgált folyamat – realizációs függvény elegendően hosszú  $S$  ívhosszintervallumon rendelkezésre áll. Ezzel a  $C_{\rho\rho}(\delta)$  autokovariancia függvény egy  $\hat{C}_{\rho\rho}(\delta, w)$  torzítatlan statisztikai becslése rendelkezésre áll, és ebből a folyamat spektrális sűrűségfüggvényének becslése már előállítható lesz. Tekintsük először a spektrális sűrűségfüggvénynek az  $\Omega$  út-körfrekvenciától függő

$$\Phi_{\rho\rho}(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_{\rho\rho}(\delta) e^{-i\Omega\delta} d\delta$$

definiáló kifejezését, azaz az autokovariancia-függvény inverz Fourier-transzformáltját. Ha most az elméleti autokovariancia-függvény helyett annak torzítatlan statisztikai becslését vetjük alá inverz Fourier-transzformációnak, akkor a spektrális sűrűségfüggvény

$$\hat{\Phi}_{\rho\rho}(\Omega, w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{C}_{\rho\rho}(\delta, w) e^{-i\Omega\delta} d\delta$$

becsült, véletlen ingadozásoknak alávetett változatához jutunk. Nem kell különösebben bizonyítani, hogy az így kapott  $\hat{\Phi}_{\rho\rho}(\Omega, w)$  kifejezés egy  $\Omega$  *út-körfrekvencia-paraméteres sztochasztikus folyamat* lesz, melynek realizációs függvényei az elméleti spektrális sűrűségfüggvény körül, azt esetlegesen többször átmetszve helyezkednek el. Mindenesetre kijelenthető, hogy a becsült spektrális sűrűség annál kisebb ingadozásokat fog mutatni, minél jobban közelíti az elméleti autokovariancia-függvényt a számításához felhasznált statisztikailag becsült autokovariancia-függvény. Ez az eset akkor várható, ha számítások alapját képező  $\rho(s, w)$  hibafolyamat realizáció elegendően hosszú  $S$  intervallumon ismert lefutású. Azt a kérdést, hogy milyen hosszúságú realizáció ad megfelelő becslést nem könnyű elméletileg megválaszolni. Mégis a konkrét vizsgálat esetén célszerű eljárás adódik oly módon, hogy különböző növekvő  $S$  értékek mellett megismételve a  $\hat{C}_{\rho\rho}(\delta, w)$  becsült autokovariancia-függvény számítását azon  $S$  értéknél lehet megállni, amelynél már nem jelentkezik jelentős eltérés a megelőzően alkalmazott  $S$  érték alkalmazása mellett kapott eredményhez képest. Arról sem szabad megfeledkezni, hogy a stacionárius folyamatok matematikai statisztikai vizsgálatában elfogadott ökölszabály szerint a  $\delta$  eltolási paraméternek csak a  $0 \leq |\delta| \leq 0,1 S$  egyenlőtlenségnek megfelelő értékei mellett adódnak elfogadhatóan kis szórású becslések az autokovariancia-függvényre nézve. Ezen eljárás után a „kellően pontos” becsült autokovariancia-függvényből számított becsült spektrális sűrűségfüggvény is elegendően pontosnak tekinthető. A spektrális sűrűségfüggvény elfogadható pontosságú becslésének birtokában a gyengén stacionáriusnak tekintett  $\rho(s, w)$  hibafolyamat elemi komplex harmonikus függvényekből való felépülésének a másodrendű statisztikák mélységéig történő jellemzése elvégezhető. A spektrális sűrűségfüggvényre támaszkodva a  $\rho(s, w)$  folyamat realizációs függvényei numerikusan előállíthatók a spektrális sűrűségfüggvénytől függő szórású véletlen amplitúdójú és a  $[-\pi, \pi]$  intervallum felett egyenletes eloszlású *véletlen fázisszögekkel bíró koszinusz függvények lineáris kombinációjaként*.

## 5. A KÉTPARAMÉTERES NEMSTACIONÁRIUS SZTOCHASZTIKUS MEZŐ

A 4. és 5. fejezetekben a  $\mu_0(s, w)$  *tapadási határ folyamatra* kidolgozott modellek lényegét ( $\Pi$ ,  $\mathbf{F}(s)$ ,  $\Phi_{\rho\rho}(\Omega)$ ) matematikai objektum-hármas tartalmazza, ami közelebbről annyit jelent, hogy a szereplő három objektum (vagy becsléseik) ismeretében elvégezhető a  $\mu_0(s, w)$  *tapadási határ folyamat* realizációk számítógépi sztochasztikus szimulációval történő generálása. Tekintettel arra, hogy az erőkapcsolati tényező  $\mathbf{p}$  paramétervektora pályáivhossz mentén kialakuló előre meg nem adható változásait leíró  $\mathbf{p}(s, w)$  vektorértékű sztochasztikus folyamatnak a  $\mu_0(s, w)$  folyamaton túl három tovább-

bi összetevő sztochasztikus folyamata van (a  $v_0(s,w)$ , a  $v_e(s,w)$  és a  $\mu_\infty(s,w)$  folyamatok), ezért mind a négy szereplő koordinátafolyamat leírására egy-egy átmenetvalószínűségi mátrixból, szinttartózkodási feltételes eloszlásfüggvények alkot-  
ta mátrixfüggvényből és spektrális sűrűségfüggvényből álló saját objektumhármass be-  
vezetése szükséges. Így a numerikusan is realizálható szimulációs modell-struktúrát a  
paramétervektor négy-összetevő folyamatához rendelt és a hozzárendelést egyértelmű  
megjelöléssel azonosított

$$\mu_0(s,w) \rightarrow (\Pi_{\mu_0}, F_{\mu_0}(s), \Phi_{\rho\rho}^{\mu_0}(\Omega))$$

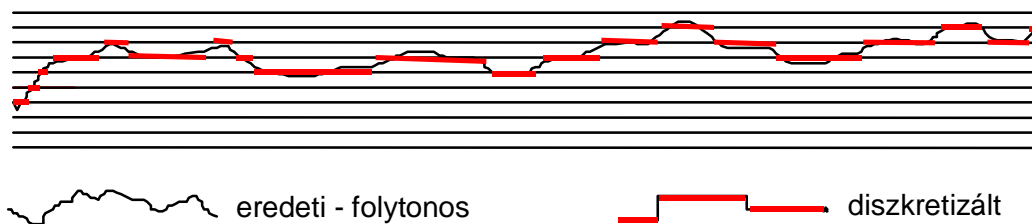
$$v_0(s,w) \rightarrow (\Pi_{v_0}, F_{v_0}(s), \Phi_{\rho\rho}^{v_0}(\Omega))$$

$$v_e(s,w) \rightarrow (\Pi_{v_e}, F_{v_e}(s), \Phi_{\rho\rho}^{v_e}(\Omega))$$

$$\mu_\infty(s,w) \rightarrow (\Pi_{\mu_\infty}, F_{\mu_\infty}(s), \Phi_{\rho\rho}^{\mu_\infty}(\Omega))$$

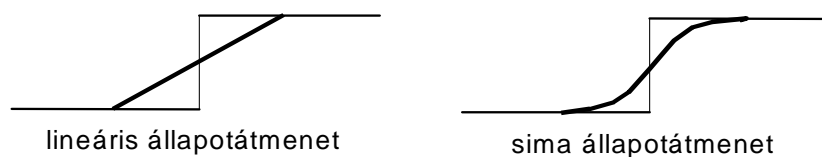
objektumnégyes együttesen fogja jellemezni.

A fentiek szerinti folyamat-struktúra lényegileg tehát a négy *szemi-Markov hordozó-folyamattal* és a rájuk szuperponált négy *másodrendben gyengén stacionárius ingadozás-folyamattal* meghatározott, ahol a valószínűségi mechanizmus konkrét rögzítése a bevezetett matematikai objektum-hármassokban szereplő jellegzetes, kvantitatíve is jól körülhatárolt – numerikusan meghatározott – adatrendszerekkel történik. A szóbanforgó paraméter-folyamatok realizációs függvényeinek jellegét a 4. ábra szemlélteti.



4. ábra A folytonos paraméterfolyamat diszkrétizálása, szemi-Markov realizáció nyerése céljából

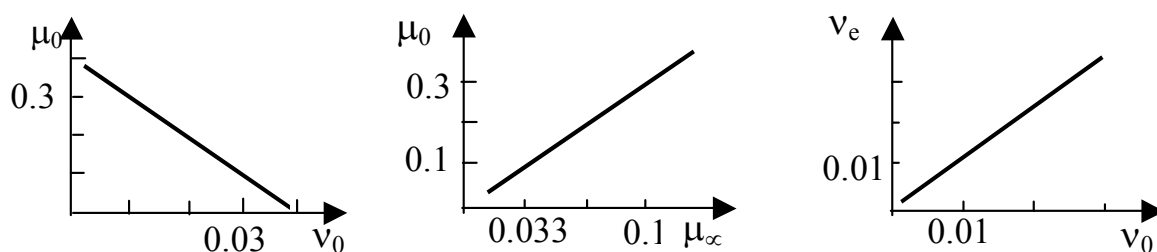
A tárgyalt folyamatmodellben alkalmazott diszkrétizált állapotok közötti ugrásszerű átmeneteket a kutatómunka továbbvitele során előbb (célszerűen az átmenet előtti *előzményi állapottól függő feltételes várható értékek* alapján meghatározott) meredekségű *lineáris szakaszokkal* célszerű leírni, majd a nyert tapasztalatok alapján kedvezőbb simaságot biztosítani képes, ugyancsak a *várható átmenet-terjedelmi és meredekségi statisztikák* adatait figyelembe véve meghatározott profilgörbék alkalmazása jöhet szóba. Az említett átmeneti szakasz modell változatokat az 5. ábrán vázoltuk.



5. ábra Az ugrásszerű állapotátmenetek kiküszöbölésének két lehetséges módja

A tárgyalás ezen pontján kell szót ejteni a szereplő négy paraméterfolyamat egymás közötti kapcsolatáról. A gördülőkapcsolatok tapadási határára vonatkozóan ismert mérési

eredmények alapján azonnal kimondható, hogy a négy paraméterfolyamat semmiképpen sem lehet valószínűségelméleti értelemben egymástól páronként független, és még kevésbé összességébe (teljesen) független. Egyrésztől ugyanis meglehetősen erős negatív korrelációjú sztochasztikus kapcsolat van jelen a  $\mu_0(s,w)$  és  $v_0(s,w)$  paraméterfolyamat-pár azonos  $s$ -hez tartozó perem-valószínűségi változói között. Másrészt viszont szoros pozitív korrelatív kapcsolat áll fenn mind a  $\mu_0(s,w)$  és  $\mu_\infty(s,w)$ , mind a  $v_0(s,w)$  és  $v_e(s,w)$  paraméterfolyamat-párok azonos  $s$ -hez tartozó perem-valószínűségi változói között. A jelzett kapcsolatok *jellegét* a 6. ábrán mutatjuk be. Megjegyezzük, hogy *Kandó Kálmán* már 1930-ban a V40 sor villamosmozdony dinamikai vizsgálatainál megállapított egy mérési eredményekre támaszkodó ökölszabályt a  $\mu_0$  tapadási határ és perdülés végállapotában érvényes  $\mu_\infty$  csúszósurlódási tényező értéke között [5]. Ezt a lineáris  $\mu_0 = 3\mu_\infty$  regressziós egyenest, valamint az ezzel összefüggően a  $\mu_0$  tapadási határ és annak  $v_0$  extrémumhelye között felírható  $\mu_0 = 0,4 - 10v_0$  egyenest feltüntettük a diagramokban. Említésre méltó még a  $v_0$  és a  $v_e$  kúszások között az elmúlt években végzett szimulációs kísérletekre meg-alapozott  $v_e = 1,08 v_0$  közelítő lineáris regressziós összefüggés is.



6. ábra A hosszirányú erőkapcsolati tényező paraméterfolyamatai között fennálló lineáris regressziós kapcsolat jellemzéséhez

Az elmondottak alapján olyan kép rajzolódik ki, hogy a szoros korrelatív kapcsolatok miatt a szereplő négy paraméterfolyamatot erősen összefüggőnek kell tekintenünk, így a közelítő vizsgálatokhoz az is megengedhető, hogy a négy paraméter közül egy *vezérparaméter* kerüljön megválasztásra, és a többi három ennek függvényeként kezelhető. A *vezérparaméter* szerepét a  $\mu_0(s,w)$  tapadási határ folyamat vagy a hozzá tartozó  $v_0(s,w)$  kúszási abszcissa folyamat töltheti be.

Mind a  $\mu_0$ , mind a  $v_0$  paraméter pályáívhossz menti alakulására nézve (azaz konkrét realizációs függvényeikre nézve) mérési információt lehet szerezni alkalmas mérőberendezéssel. A *TRIBOROLLER* koncepcióban ([11], [12]) kidolgozott mérési eljárás szolgáltatja mind a  $\mu_0(s,w)$ , mind a  $v_0(s,w)$  folyamat realizációpár  $\{s_i\}$ ,  $i=1,2,\dots,M$  nem feltétlenül ekvidisztáns mintavételi pályapontokhoz tartozó  $\{\mu_{0i}\}$  és  $\{v_{0i}\}$ ,  $i=1,2,\dots,M$  értéksorozatok. Ezekből pedig első lépésben (pl. lineáris interpolációs technikával) a számítógépben megjeleníthető a realizációs függvények szakaszonként lineáris közelítése, majd ezekre támaszkodva tetszőlegesen sűrű újabb ekvidisztáns időpontosorozaton a számított mintavételi értékekre támaszkodva kértékelhetők a közelítő szemi-Markov folyamatokat jellemző  $\Pi_{\mu_0}$  és  $\Pi_{v_0}$  átmenetvalószínűségek,  $F_{\mu_0}(s)$  és  $F_{v_0}(s)$  feltételes tartózkodási hossz eloszlásfüggvények, valamint a  $\Phi_{pp}^{\mu_0}(\Omega)$  és  $\Phi_{pp}^{v_0}(\Omega)$  spektrális sűrűségfüggvények. Ily módon az előzetes várakozásunk szerint erősen összefüggő folyamatpár jellemzői meg vannak határozva, és nincs akadálya, hogy egyrészt részletes elemzésre kerüljön a  $\mu_0(s,w)$ ,  $v_0(s,w)$  folyamatpár korrelatív kapcsolata, másrészt pedig megvan annak a lehetősége, hogy a kutató és fejlesztőmunkában szükséges di-

namikai és irányítástechnikai rendszerszimulációkat számítógépi úton a valós üzemben jelentkező tribológiai viszonyokat jól megközelítő feltételek mellett lehessen végrehajtani.

## 6. AZ ÚJ TRIBOLÓGIAI MODELL ALKALMAZÁSA

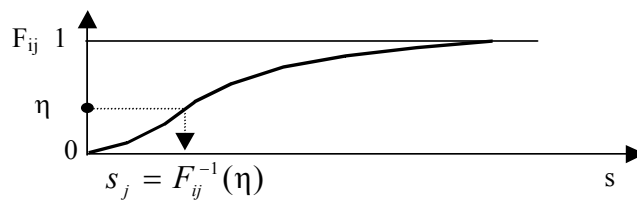
A fentiekben megfogalmazottak alapján a bevezetett  $(\Pi, F(s), s_{pp}(\omega))$  objektum-hármasra támaszkodva, véletlenszám generálási technikára többszörösen építő szimulációs eljárással előállítható a  $p(s, w)$  vektorfolyamat bármelyik komponensfolyamatának egy közelítő realizációs függvénye. A következőkben a tapadási határ pályamenti alakulását leíró  $\mu_0(s, w)$  komponensfolyamat realizációjára vonatkozóan mutatjuk be a generálás menetét.

1. A szimulációs folyamat indításához célszerű a  $\mu_0$ -várható értékéhez legközelebb fekvő  $i$  indexű  $\mu_{0i}$  diszkrét állapotot választani.
2. A  $\mu_{0i}$  kezdőállapot megválasztása után egy állapotátmenet generálása történik meg a  $\Pi_{\mu_0}$  átmenetvalószínűségi mátrix figyelembe vételével. A  $\Pi_{\mu_0}$  sztochasztikus mátrix lévén bármely sorában az elemek összege egységnyi. Ha pl. az  $i$ -edik sort tekintjük és felrajzoljuk a szereplő feltételes valószínűségeket hosszaikkal ábrázolva egymáshoz fűzzük, akkor a  $[0, 1]$  intervallum egy felosztásrendszerét (partícióját) kapjuk. Generáljunk most egy egyenletes eloszlású  $\eta$  véletlen számot a  $[0, 1]$ -intervallumból, akkor ezen realizált  $\eta$  szám ismeretében a folyamat állapotváltozás után felvett  $j$ -indexű  $\mu_{0j}$  állapot az által van meghatározva, hogy a „kisorsolt”  $\eta$  a szóban forgó felosztásrendszer melyik  $j$  indexhez tartozó  $p_{ij}$  átmenetvalószínűséget megjelenítő intervallumába esett. Képletszerűen azon  $j$  index kerül kiválasztásra, amelyre a  $\Pi_{\mu_0}$   $i$ -edik sorában lévő átmenetvalószínűségek és a „kisorsolt”  $\eta$  viszonya az

$$\sum_{k=1}^j p_{ik} \leq \eta < \sum_{k=1}^{j+1} p_{ik}$$

egyenlőtlenségnek megfelel.

3. A 2.pont szerint meghatározott  $\mu_{0j}$  állapot ismeretében megtörténik az  $F_{\mu_0}(s)$  mátrixfüggvény  $ij$ -indexű  $F_{ij}(s)$  feltételes eloszlásfüggvénye figyelembevételével a  $\mu_{0j}$  állapotban befutott úthossz generálása. Az eljárás ismét egy a  $[0, 1]$ -intervallumban egyenletes eloszlású  $\eta$  véletlen szám kisorsolására támaszkodik. Tekintsük ezen eljárás magyarázatához a 7. ábrát, amelyen az  $F_{ij}(s)$  kezelésére alkalmazott szakaszonként lineáris közelítésű feltételes eloszlásfüggvény látható.



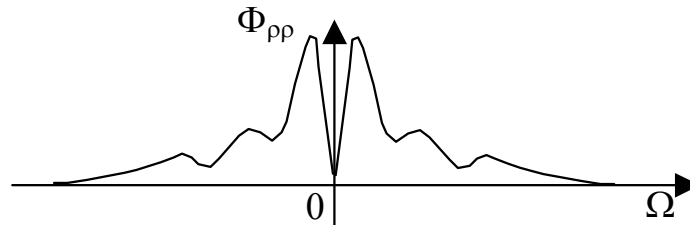
7. ábra Az  $F_{ij}(s)$  szinttartózkodási feltételes eloszlásfüggvény szakaszonként lineáris közelítése, az adott szinten befutott pályahossz „sorsolása”

Helyezzük a függőleges tengelyre a kisorsolt egyenletes eloszlású  $\eta$  véletlen számot és vetítsük vissza az  $s$  tengelyre az  $s_j = F_{ij}^{-1}(\eta)$  összefüggés alkalmazásával, ahol  $F_{ij}^{-1}(\cdot)$  az  $F_{ij}(s)$  feltételes eloszlásfüggvény inverz függvényét jelöli. Ismeretes, hogy a kapott  $s_j$  éppen az  $F_{ij}(s)$  eloszlásfüggvénnyel bíró véletlen szám lesz.

4. A járműkerék előregerdülése következtében az előző lépésbeli  $s_j$  tartózkodási úthossz kimerül, és ez jelzi, hogy állapotátmenet következik. Ekkor a  $\mu_{0j}$  előzményi állapot ismeretében generáljuk a következő állapotot annak a 2. pontban elmondottak szerint. Így rendelkezésünkre áll a  $\mu_{0j}$  állapot után bekövetkező új  $\mu_{0k}$  állapot.
5. Az előző pontban kiadódott  $\mu_{0k}$  új állapot ismeretében a kerék által ezen állapot érvényesülése közben befutott  $s_k$  út aktuális értékét a 3.pont szerint eljárás értelemszerű alkalmazásával kapjuk.

A 2. és 3.pontok szerinti sztochasztikus szimulációt a teljes befutandó pályahossz kimerüléséig sorozatosan alkalmazva rendelkezésünkre áll a szimulált szemi-Markov hordozó folyamat realizáció.

Erre a lépcsős realizációs függvényre szuperponáljuk a kisamplitúdójú és viszonylag kis út-körfrekvenciájú (azaz viszonylag nagy hullámhosszú) ingadozások gyengén stacionáriusnak tekintett  $\rho(s,w)$  folyamata realizációs függvényét, amelyet a mérési eredmények és a szemi-Markov hordozófolyamat különbségeként adódó folyamatból kiértékelt  $\Phi_{\rho\rho}(\Omega)$  *spektrális sűrűségfüggvény* alapján generálunk a számítógépes szimuláció során. A szóban forgó spektrális sűrűségfüggvény jellegét a 9. ábra mutatja.



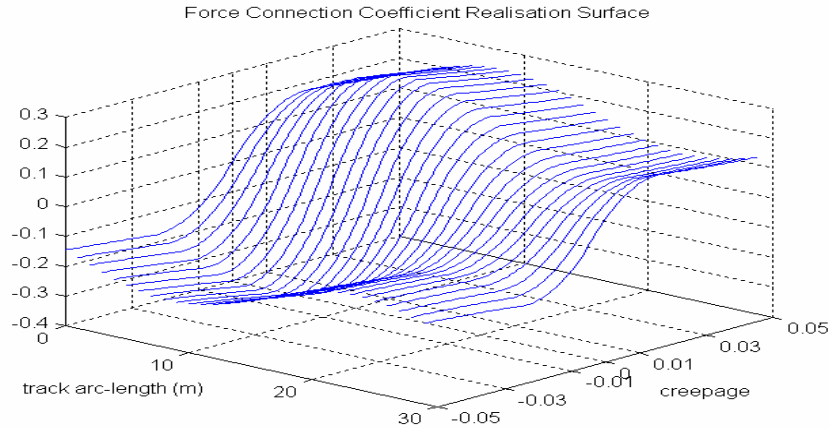
9. ábra A  $\rho(s,w)$  másodrendben gyengén stacionáriusnak tekintett ingadozási folyamat kétoldalas spektrális sűrűségfüggvénye. A függvény görbe alatti teljes terület a  $\rho(s,w)$  folyamat szórásnégyzetét szolgáltatja

A másodrendben gyengén stacionárius folyamatok realizáció generálása a spektrum sajátosságait tükröző szórású véletlen amplitúdókkal és az egységkörön szimmetrikus eloszlású véletlen fázisszögekkel történik [3]. A realizációs függvény számítása a

$$\rho(s,w) = \sum_{i=1}^n 2c_i(w) \cos(\Omega_i s + \psi_i(w))$$

képlet alapján végezhető el, ahol az  $\Omega_i$   $i=1,2,\dots,n$  az útkörfrekvencia tengelyen választott  $\Delta\Omega$  ekvidisztáns osztásközök felezőpontjainak sorozata,  $c_i(w)$ ,  $i=1,2,\dots,n$  zéró várható értékű és  $\sigma_i = \sqrt{\Phi_{\rho\rho}(\Omega_i)\Delta\Omega}$  szórású normális eloszlású véletlen számok sorozata, míg  $\psi_i(w)$ ,  $i=1,2,\dots,n$  a  $[-\pi,\pi]$  szögintervallumban egyenletes eloszlású, vagy speciális szimmetriatulajdonságoknak eleget tevő eloszlású véletlen számok sorozata.

A bemutatott eljárás szerint a szemi-Markov hordozófolyamat a gyengén stacionáriusnak tekintett eltérősfolyamat realizációk összegeként generált  $\mu_0(s,w)$  vezérparaméter folyamat ismeretében figyelembe véve a 6. ábra kapcsán tárgyalt függőségeket, a többi – a  $v_0(s,w)$ ,  $v_e(s,w)$  és a  $\mu_\infty(s,w)$  – paraméterfüggvény realizációja is közelítő pontossággal meghatározható. Ilyen szituációban nincs akadálya annak, hogy a négy ismert paraméterfolyamat realizáció alapján a meghatározásra kerüljön az erőkapcsolati tényezőt meghatározó kétparaméteres sztochasztikus mező egy adott  $w \in W$  elemi eseményhez tartozó realizációs jellegfelülete. A szóban forgó realizációs jellegfelületet a 10. ábrán mutatjuk be.



10. ábra A kerék/sín erőkapcsolati tényező sztochasztikus mező modelljének egy szimulált realizációs felülete a hosszirányú kúszás és a befutott pályaivhossz függvényében.

## 7. BEFEJEZŐ MEGJEGYZÉSEK

Az elvégzett vizsgálatok alapján a következő megállapítások rögzíthetők:

- A  $\mu$  erőkapcsolati tényezőt a  $v$  hosszirányú kúszás mellett meghatározó  $\mathbf{p}$  paramétervektor elemeit sztochasztikus folyamatnak tekintve belépő a  $\mathbf{p}(s,w)$  vektorfolyamat komponenseinek viselkedését egy lépcsős realizációjú hordozófolyamat és egy erre szuperponált ingadozásfolyamat összegeként célszerű elemezni.
- A hordozófolyamat *szemi-Markov folyamat*ként való modellezése első közelítésben a homogén  $\Pi$  átmenetvalószínűségi mátrixú beágyazott Markov lánc és az egyes állapotokban befutott pályaivhosszak mint valószínűségi változók *feltételes eloszlásfüggvényei* alkotta  $F(s)$  mátrixfüggvény bevezetésével megvalósítható.
- A lépcsős hordozófolyamat és a mért folytonos folyamat közötti eltérést megjelenítő hibafolyamatot másodrendben gyengén stacionárius ingadozásmoddal célszerű közelíteni, és jellemzőjeként az  $\Omega$  útkörfrekvenciától függő  $\Phi_{pp}(\Omega)$  spektrális sűrűségfüggvényét célszerű tekinteni.
- A  $\mathbf{p}(s,w)$  vektorfolyamat koordinátáinak *erősen korrelált voltát* figyelembevéve célszerű *vezérparaméterként* a  $\mu_0$  tapadási határt választani, és vizsgálatokat a  $\mu_0(s,w)$  folyamat numerikus modellezésére alapozni a vonatkozó  $(\Pi, F(s), \Phi_{pp}(\Omega))$  objektumhármasszámú jellemzői bevonásával és véletlenszám generáláson alapuló sztochasztikus szimulációval.
- A bemutatott szimulációs technika alkalmazásának eredményeként előáll a további járműdinamikai alkalmazásokhoz jól felhasználható  $\mu(v,s,w)$  kétparaméteres *sztochasztikus mező*. Ezen sztochasztikus mező a mozgásegyenletekbe beépülve azokat *sztochasztikus differenciálegyenletekké* [13] változtatja, és a dinamikai rendszer minden mozgás- és erőhatás-jellemzője sztochasztikus folyamatként jelentkezik.

- Amennyiben azonban az erőkapcsolati tényezőt leíró sztochasztikus mező egy realizációs jellegfelülete rendelkezésre áll, akkor ennek figyelembe vételével a járműdinamikai szimuláció végrehajtható és a válaszfolyamatok egy realizációjához juthatunk. Sokszor ismételve az eljárást a válaszfolyamatok statisztikai jellemzői kiértékelhetők (középértékek, szórások, korrelációk, spektrumok, kontingenciák, stb.)
- További kutatások szükségesek egyrészt a tribológiai jellemzők mérésének tökéletesítésére valamint a most kialakított sztochasztikus modell általánosabb megfogalmazására (nem homogén beágyazott Markov lánc, nemstacionárius eltérési folyamat, stb).

## 8. IRODALOM

- [1] **Johnson, K.L.I.**: Contact mechanics. Cambridge University Press, Cambridge, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney, 1985.
- [2] **Kalker, J.J.**: Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1990.
- [3] **Zobory, I.**: Stochasticity in Vehicle System Dynamics. Proceedings of the 1<sup>st</sup> MINI Conference on Vehicle System Dynamics, Identification and Anomalies (Ed. by Prof. J. Márialigeti), BME. Budapest, 1992. p.8-21.
- [4] **Zobory I.**: A járműkerék hosszirányú erőkapcsolati tényezőjéről I., II. Járművek, Mezőgazdasági- és Építőipari Gépek. Vol. 41. 1994. október, p. 337-342. és Vol. 41. 1994. p. 399-404.
- [5] **Kandó K.**: Villamos mozdonyok hajtóművének dinamikus igénybevétele kerékcúszás következtében. Matematikai és természettudományi értesítő, A Magyar Tudományos Akadémia III. osztályának folyóirata. Akadémiai székfoglaló, Budapest, 1937, p.729-763.
- [6] **Megyeri J.- Szeidl L.- Zobory I.**: A pálya alrendszer a vasúti pálya-jármű rendszerben. Közlekedéstudományi Szemle,. XLVI. évf. 7. szám. Budapest, 1966. július, p.241-247.
- [7] **Zobory, I.- Békefi, E.**: Software STOPSIM for Stochastic Simulation of Motion and Loading Processes of Vehicles. Periodica Polytechnica (Transportation Engineering), Vol.22.,No 2., p.111-127.
- [8] **Zobory, I.- Békefi, E.**: Brake Dynamics and Control Strategy for Railway Vehicles Equipped with Anti-Slip-Device. Proceedings of the 9th MINI Conference on Vehicle System Dynamics, Identification and Anomalies. (Ed. by Prof. I. Zobory), BME. Budapest, 2004. p.227-236.
- [9] **Krettek, O.- Zobory, I.**: On Creep Dependence of Braking Forces with Disc-Braked Railway Vehicles Equipped with Anti-Skid-Device. Proceedings of the 9th MINI Conference on Vehicle System Dynamics, Identification and Anomalies.(Ed. by Prof. I. Zobory), BME, Budapest, 2004. p.107-116.
- [10] **Zobory I.**: A kerék/sín kapcsolat vasúti pálya mentén kialakuló tribológiai jellemzőinek sztochasztikus modellezése. BME. Vasúti Járművek Tanszék, Budapest, 2005.
- [11] **Zobory I.- Sostarics, Gy.**: A *TRIBOROLLER*. Kutatási jelentés. BME. Vasúti Járművek Tanszék, Budapest, 2005.
- [12] **Zobory I.- Császár L.**: A *TRIBOROLLER* – mérési elv és konstrukció. Kutatási jelentés. BME Vasúti Járművek Tanszék, Budapest, 2007.
- [13] **Arnold, L.**: Sztochasztikus differenciálegyenletek. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1984.